UNIVERSITÉ D'ORLÉANS
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE L'ÉNERGIE ET DES MATÉRIAUX

ÉPREUVES D'ADMISSION 1984
OPTION T, TA, M, M', P, P'

MATHÉMATIQUES

DURÉE 4 H COEFFICIENT 4)

Correction

Problème N°1

I

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\sin x + \sum_{k=1}^{n} 2\sin x \cos 2kx &= \sin x + \sum_{k=1}^{n} (\sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x) \\ &= \sin x + (\sin(2n+1)x - \sin x) = \sin(2n+1)x.\end{aligned}$$

Ainsi, si $x \in]0, \pi[$ alors $\sin x \neq 0$ et donc :

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos 2kx = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}.$$

(b) D'après le question précédente,

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \mathrm{d}x = \pi + 2\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \sin 2kx \mathrm{d}x = \pi.$$

(c) Toujours d'après ce qui précède, on a $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x^2 \mathrm{d}x + 2\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} x^2 \sin 2kx \mathrm{d}x$. Une intégration par parties donne $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \sin 2kx \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2k^2}$, d'où :

$$\int_0^{\pi} x^2 \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{k^2}$$

2. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est bien définie et continue (par prolongement en 0) sur $[0, +\infty[$, donc $\forall x \geq 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ existe. À l'aide d'une intégration par parties, on a pour tout $x \geq 1$:

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \frac{-\cos(x)}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} \mathrm{d}t$$

D'une part, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{-\cos(x)}{x} + \cos 1 = \cos 1$. D'autre part, la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, car $\left|\dfrac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$, donc

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} \mathrm{d}t.$$

Il en résulte que $\displaystyle\lim_{x \mapsto \infty} F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ existe, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$ est convergente.

3. (a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Une simple intégration par parties donne :

$$I_n = \int_0^b f(t)\sin nt \mathrm{d}t = \left[f(t)\Big(-\frac{\cos nt}{n}\Big)\right]_0^b - \int_0^b f'(t)\,\Big(-\frac{\cos nt}{n}\Big)\mathrm{d}t.$$

Donc

$$|I_n| \leq \frac{2M}{n} + \frac{1}{n}\,\left|\int_0^b f'(t)\ \cos nt \mathrm{d}t\right| \leq \frac{2M}{n} + \frac{1}{n}\,\int_0^b |f'(t)|\mathrm{d}t.$$

où $M = \sup_{x\in[0,b]} |f(x)|$. Par encadrement il vient sans difficulté

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

(b) Comme g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,b]$, alors par opération f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$. De plus

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = g'(0) = f(0),$$

donc f est continue en 0.

D'autre part, f est dérivable sur $]0,b]$ et $\forall x \in]0,b]$, $f'(x) = \dfrac{xg'(x)-g(x)+g(0)}{x^2}$. Comme g est classe $\mathscr{C}^2$, alors

$$g(x) = g(0) + xg'(0) + \frac{x^2}{2}g''(0) + x^2\varepsilon_1(x)$$

et

$$g'(x) = g'(0) + xg''(0) + x\varepsilon_2(x),$$

avec $\lim_{x\to0}\varepsilon_1(x) = \lim_{x\to0}\varepsilon_2(x) = 0$. D'où $f'(x) = \dfrac{1}{2}g''(0) + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)$, donc $\lim_{x\to0^+} f'(x) = \dfrac{1}{2}g''(0)$.
D'après le théorème de prolongement d'une dérivée[1], f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{2}g''(0)$. De plus f' est continue en 0 et finalement f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,b]$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
K_n - Wg(0) &= \int_0^b g(x)\frac{\sin nx}{x}\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} g(0)\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^b g(x)\frac{\sin nx}{x}\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} g(0)\frac{\sin nt}{t}\mathrm{d}t \ \ (\text{ poser } x = nt\ ) \\
&= \int_0^b \frac{g(x)-g(0)}{x}\sin nx\mathrm{d}x - \int_b^{+\infty} g(0)\frac{\sin nt}{t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x - g(0)\int_{nb}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u \ \ (\text{ poser } u = nt\ )
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Riemann, la question **3.3a.** et puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$, $\lim_{n\to\infty}\int_0^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0$ et $\lim_{n\to\infty}\int_{nb}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = 0$ car c'est le reste d'une intégrale convergente. D'où :

$$\lim_{n\to\infty} K_n = Wg(0).$$

1. Soit I un intervalle, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que f' admet en a une limite finie l. Alors, f est dérivable en a et f' est continue en a avec $f'(a) = l$.

4. (a) Par la relation de Chasles on a :

$$\int_0^{\pi} h(x)\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} h(x)\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x$$

Utilisons le changement de variable $t = \pi - x$ dans la deuxième intégrale :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} h(x)\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} h(\pi-t)\frac{\sin(2n+1)(\pi-t)}{\sin(\pi-t)}(-\mathrm{d}t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\pi-t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\mathrm{d}t$$

D'où

$$\int_0^{\pi} h(x)\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (h(x)+h(\pi-x))\,\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x.$$

(b) Il est clair que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et que $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$$g'(x) = (h'(x)-h'(\pi-x))\frac{x}{\sin x} + (h(x)+h(\pi-x))\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$$

et

$$g''(x) = (h''(x)+h''(\pi-x))\frac{x}{\sin x} + 2(h'(x)-h'(\pi-x))\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} + (h(x)+h(\pi-x))\frac{x-\sin 2x + x\cos^2 x}{\sin^3 x}.$$

De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = h(0)+h(\pi) = g(0)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g'(x) = h'(0)-h'(\pi)$ et

$$\lim_{x\to 0^+} g''(x) = \frac{1}{3}\,(h(0)+h(\pi)) + h''(0)+h''(\pi).$$

Donc, d'après le théorème de prolongement d'une dérivée, g est deux fois dérivable en 0 et que ces dérivées sont continues en 0. Donc g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(c)

$$\begin{aligned}
L_n - W.(h(0)+h(\pi)) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (h(x)+h(\pi-x))\,\frac{x}{\sin x}\,\frac{\sin(2n+1)x}{x}\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} (h(0)+h(\pi))\,\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\frac{\sin(2n+1)x}{x}\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_0^{+\infty} g(0)\frac{\sin(2n+1)t}{t}\mathrm{d}t, \quad (\text{ poser } x=(2n+1)t\ ) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{g(x)-g(0)}{x}\right]\sin(2n+1)x\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(0)\frac{\sin(2n+1)t}{t}\mathrm{d}t \quad (\text{ poser } t=(2n+1)x\ ) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g(x)-g(0)}{x}\sin(2n+1)x\mathrm{d}x - g(0)\int_{(2n+1)\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u, \quad u=(2n+1)t
\end{aligned}$$

D'après la question **3.3b.**, la fonction $x \mapsto \dfrac{g(x)-g(0)}{x}$ se prolonge en 0 en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, donc par le lemme de Riemann $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g(x)-g(0)}{x}\sin(2n+1)x\mathrm{d}x = 0$.

De plus $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{(2n+1)\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = 0$ car c'est le reste d'une intégrale convergente. D'où :

$$\lim_{n\to\infty} L_n = W(h(0)+h(\pi)).$$

5. (a) Si on prend $h(x) = 1$ dans la question **4.4c.**, on obtient

$$\pi = \int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = W(h(0)+h(\pi)) = 2W,$$

d'où :

$$W = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

(b) D'après la question **1.**, on a :

$$\int_0^\pi \frac{x^2}{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{3} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{k^2}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{x^2}{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{3} + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{k^2}$, mais avec la fonction $h(x) = \frac{x^2}{\pi}$, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{x^2}{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = W(h(0)+h(\pi)) = \frac{\pi^2}{2}$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(c) Des intégrations par parties successives donne $\int_0^\pi x^4\cos(2kx)\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{k^2} - \frac{3\pi}{2k^4}$. En utisant l'égalité de la question 1, on obtient :

$$\int_0^\pi \frac{x^4}{2}\left(\frac{\sin(2n+1)}{\sin x} - 1\right) = \pi^3\sum_{k=1}^{n} - \frac{3\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}$$

D'où, par passage à la limite :

$$W\frac{\pi^4}{2} - \frac{\pi^5}{10} = \frac{\pi^5}{6} - \frac{3\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

Ainsi, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90}$.

Problème N°2

Partie A

1. (a) Retranchons la première colonne à toutes les autres colonnes. Alors $D_n(a,b,x) = \det M_n(a,b,x)$ est égal au déterminant d'une matrice dont la première colonne est constituée par des termes du type $m_{i1} + x$ et tous les autres coefficients sont des constantes (ne dépendent pas de x). Si on développe ce déterminant par rapport à la première colonne, on trouve que

$$D_n(a,b,x) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(m_{i1}+x)\det(A_i)$$

où A_i est une matrice à coefficients réels. Donc $D_n(a,b,x)$ est un polynôme en x de degré inférieur ou égal à 1. Ainsi, il existe λ et μ des nombres réels tels que $\det M_n(a,b,x) = \lambda x + \mu$.

(b) Dans ce cas $x = 0$ et donc $D_n(a, b) = \mu$, de plus $D_n(a, b, -a) = -\lambda a + \mu$ et $D_n(a, b, -b) = -\lambda b + \mu$. Mais, d'après la définition de la matrice $D_n(a, b, -a) = (r_1 - a)(r_2 - a)...(r_n - a) = f_n(a)$ et $D_n(a, b, -b) = f_n(b)$. Ce qui se résume en le système :

$$\begin{cases} -\lambda x + \mu &= f_n(a) \\ -\lambda b + \mu &= f_n(b) \end{cases}$$

D'où $\lambda(b - a) = f_n(a) - f_n(b)$ et donc $\lambda = \dfrac{f_n(a) - f_n(b)}{b - a}$ et $\mu = f_n(a) + \lambda a$. Après simplification, on obtient :

$$D_n(a, b) = \mu = \frac{af_n(b) - bf_n(a)}{a - b}.$$

(c) Pour trouver le résultat lorsque $a = b$, on va prendre le résultat précédent et faire tendre b vers a. Pour cela, on va poser $b = a + h$. On a donc :

$$\begin{aligned} D_n(a, a + h) &= \frac{(a + h)f_n(a) - af_n(a + h)}{h} \\ &= f_n(a) - a\frac{f_n(a + h) - f_n(a)}{h} \end{aligned}$$

D'autre part, l'application $(a, b) \mapsto D_n(a, b)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, car elle est polynômiale en a et b. D'où :

$$D_n(a, a) = \lim_{h\to 0} D_n(a, a + h) = \lim_{h\to 0} f_n(a) - a\frac{f_n(a + h) - f_n(a)}{h} = f_n(a) - af_n'(a).$$

2. (a) On a :

$$M_n(a, a, 0) - xI_n = \begin{pmatrix} r_1 - x & a & a & \dots & a \\ a & r_2 - x & a & \dots & a \\ a & a & r_3 - x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & r_n - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & a & a & \dots & a \\ a & s_2 & a & \dots & a \\ a & a & s_3 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & s_n \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $s_i = r_i - x$. D'après l'étude précédente, on a :

$$P_n(x) = \det(M_n(a, a, 0) - xI_n) = g_n(a) - ag_n'(a)$$

où $g_n(t) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(s_i - t) = \prod_{i=1}^{n}(r_i - x - t) = f_n(x + t)$. D'où :

$$P_n(x) = f_n(a + x) - af_n'(a + x).$$

(b) D'après la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \prod_{i=1}^{n}(r_i - a - x) - a\left(\prod_{i=1}^{n}(r_i - a - x)\right)' \\ &= \prod_{i=1}^{n}(r_i - a - x) + a\sum_{j=1}^{n}\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n}(r_i - a - x) \\ &= \prod_{i=1}^{n}(r_i - a - x)\left[1 + a\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j - a - x}\right]. \end{aligned}$$

3. (a) On a $P_n(r_1-a)=f_n(r_1)-af_n'(r_1)=-af_n'(r_1)=a\sum_{j=1}^{n}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}(r_i-r_1)=a\prod_{i=2}^{n}(r_i-r_1)$. Donc $P_n(r_1-a)>0$ et a ont même signe.

De même $P_n(r_n-a)=f_n(r_n)-af_n'(r_n)=-af_n'(r_n)=a\sum_{j=1}^{n}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}(r_i-r_n)=(-1)^{n-1}a\prod_{i=1}^{n-1}(r_n-r_i)$. Donc le signe de $P_n(r_n-a)$ est celui de $(-1)^{n-1}a$.

(b) Pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}P_n(r_k-a)&=a\sum_{j=1}^{n}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}(r_i-r_k)=a\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(r_i-r_k)\\&=a(r_1-r_k)...(r_{k-1}-r_k)\prod_{i=k+1}^{n}(r_i-r_k)\\&=(-1)^{k-1}a(r_k-r_1)...(r_k-r_{k-1})\prod_{i=k+1}^{n}(r_i-r_k).\end{aligned}$$

De même $P_n(r_{k+1}-a)=(-1)^k a(r_{k+1}-r_1)...(r_{k+1}-r_k)\prod_{i=k+2}^{n}(r_i-r_{k+1})$, donc $P_n(r_{k+1}-a)P_n(r_k-a)<0$.
Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda_k\in]r_k-a,r_{k+1}-a[$ tel que $P_n(\lambda_k)=0$ et ceci pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$.
• Si n est pair et $a>0$, alors $\lim_{x\to+\infty}P_n(x)=+\infty$ (le coefficient dominant de P_n est $(-1)^n$) et comme $P_n(r_n-a)<0$, donc toujours d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda_n\in]r_n-a,+\infty[$ tel que $P_n(\lambda_n)=0$.
• Si n est pair et $a<0$, alors $\lim_{x\to-\infty}P_n(x)=+\infty$ et $P_n(r_1-a)<0$, donc il existe $\lambda_0\in]-\infty,r_1-a[$ tel que $P_n(\lambda_0)=0$.
• Si n est impair et $a>0$, alors $\lim_{x\to+\infty}P_n(x)=-\infty$ et $P_n(r_n-a)>0$, donc toujours d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda_n\in]r_n-a,+\infty[$ tel que $P_n(\lambda_n)=0$.
• Si n est impair et $a<0$, alors $\lim_{x\to-\infty}P_n(x)=+\infty$ et $P_n(r_1-a)<0$, donc il existe $\lambda_0\in]-\infty,r_1-a[$ tel que $P_n(\lambda_0)=0$.
En conclusion et dans tous les cas P_n possède n racines réelles distinctes séparées par les nombres r_i-a, $1\le i\le n$. Donc $M_n(a,a)$ est diagonalisable.
Ce résultat est prévisible car la matrice $M_n(a,a)$ est symétrique réelle.

4. (a) On sait que les valeurs propres de $M_n(a,a)$ sont simples, donc si θ est une valeur propre de $M_n(a,a)$, alors $\dim\ker(M_n(a,a)-\theta I_n)=1$ et donc $\mathrm{rg}(M_n(a,a)-\theta I_n)=n-1$. En particulier tout mineur extrait de taille $n-1$ est non nul, donc $\Delta_{n-1}(a,a)\neq 0$.

(b) Si θ est une valeur propre de $M_n(a,a)$, alors $P_n(\theta)=0$ et donc

$$1+a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i-\theta-a}=0,$$

car $\theta\neq r_i-a,\ \ 1\le i\le n$. Donc pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, on obtient :

$$a\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\frac{1}{r_i-\theta-a}=-1+\frac{a}{r_j-\theta-a}=-\frac{r_j-\theta}{r_j-\theta-a}$$

ou encore

$$\frac{r_j-\theta}{r_j-\theta-a}+a\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{1}{r_i-\theta-a}.$$

Ceci se traduit matriciellement par l'égalité suivante :

$$(M_n(a,a)-\theta I_n)\begin{pmatrix}\dfrac{1}{r_1-\theta-a}\\ \dfrac{1}{r_2-\theta-a}\\ \vdots\\ \dfrac{1}{r_n-\theta-a}\end{pmatrix}=0.$$

Donc $v_\theta=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{r_1-\theta-a}\\ \dfrac{1}{r_2-\theta-a}\\ \vdots\\ \dfrac{1}{r_n-\theta-a}\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre θ.

(c) v_{θ_1} et v_{θ_2} sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes θ_1 et θ_2 et comme $M_n(a,a)$ est symétrique réelle, alors leur produit scalaire (il s'agit du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$) est nul. D'où :

$$(v_{\theta_1}|v_{\theta_2})=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i-\theta_1-a}.\frac{1}{r_i-\theta_2-a}=0.$$

Partie B

1. On a toujours $P_n(x)=f_n(a+x)-af_n'(a+x)$ et $P_n^{(k)}(x)=f_n^{(k)}(a+x)-af_n^{(k+1)}(a+x)$. Comme r est une racine multiple d'ordre s, alors $f_n(r)=f_n'(r)=...=f_n^{(s-1)}(r)=0$. D'où $P_n^{(k)}(r-a)=0$ pour $0\leq k\leq s-2$ et par suite $r-a$ est une racine multiple de P_n, c'est-à-dire $r-a$ est une valeur propre d'ordre de multiplicité $s-1$ de $M_n(a,a)$.
Localisation des autres valeurs propres de $M_n(a,a)$.
Dans ces conditions, on a $f_n(t)=\prod_{i=1}^{n}(r_i-t)=(r-t)^s\prod_{i=s+1}^{n}(r_i-t)$ et par suite :

$$f_n'(t)=-s(r-t)^{s-1}\prod_{i=s+1}^{n}(r_i-t)-(r-t)^s\sum_{j=s+1}^{n}\prod_{i\neq j}(r_i-t).$$

En particulier, on obtient, pour $k\in[\![s+1,n]\!]$:

$$P_n(r_k-a)=-a(r-r_k)^s\prod_{i=s+1\neq k}(r_i-r_k)=a(-1)^n(r_k-r)^s\prod_{\substack{i=s+1\\ i\neq k}}(r_k-r_i)$$

et

$$P_n(r_{k+1}-a)=a(-1)^n(r_{k+1}-r)^s\prod_{\substack{i=s+1\\ i\neq k+1}}(r_{k+1}-r_i)$$

Donc le signe du produit $P_n(r_k-a)P_n(r_{k+1}-a)$ est celui de $(-1)^{n-k}(-1)^{n-k-2+1}=-1$. D'où, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha_k\in]r_k-a,r_{k+1}-a[$ tel que $P_n(\alpha_k)=0$.

• Si n est pair $\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = +\infty$ et $P_n(r_n - a) = \prod_{\substack{k=s+1\\k\neq n}} (r_n - r_k) < 0$, donc P_n admet une racine α_n dans $]r_n - a, +\infty[$.
• Si n est impair $\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = -\infty$ et $P_n(r_n - a) = \prod_{\substack{k=s+1\\k\neq n}} (r_n - r_k) > 0$, donc P_n admet une racine α_n dans $]r_n - a, +\infty[$.
Finalement la matrice $M_n(a,a)$ admet n racines distinctes : r d'ordre s et $n-s$ racines simples à savoirs les α_k, $s \leq k \leq n$.

2. Supposons $r_1 < r_2 < ... < r_k$. On a toujours $P_n(x) = f_n(a+x) - af_n'(a+x)$ où $f_n(t) = \prod_{i=1}^{k}(r_i - t)^{\alpha_i}$ avec $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = n$. On a

$$P_n^{(l)}(x) = f_n^{(l)}(a+x) - af_n^{l+1}(a+x)$$

D'où $P_n^{(l)}(r_h - a) = f_n^{(l)}(r_h) - af_n^{l+1}(r_h) = 0$ pour tout $0 \leq l \leq \alpha_h - 1$. Donc $r_h - a$ est une valeur propre de $M_n(a,a)$ d'ordre de multiplicité $\alpha_h - 1$.
Cherchons, s'il existe, les autres valeurs propres de $M_n(a,a)$. On sait que :

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^{k}(r_i - a - x)^{\alpha_i}\left[1 + a\sum_{j=1}^{k}\frac{\alpha_j}{r_j - a - x}\right] = \prod_{i=1}^{k}(r_i - a - x)^{\alpha_i - 1}Q_n(x)$$

où $Q_n(x) = \prod_{i=1}^{k}(r_i - a - x) + a\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\prod_{i\neq j}(r_i - a - x)$. Montrons que Q_n s'annule sur chaque intervalle de type $]r_l - a, r_{l+1} - a[$, $1 \leq l \leq k-1$. En effet, on a :

$$Q_n(r_l - a) = a\alpha_l\prod_{i\neq l}(r_i - r_l) = a\alpha_l(r_1 - r_l)...(r_{l-1} - r_l)(r_{l+1} - r_l)...(r_k - r_l)$$

donc le signe de $Q_n(r_l - a)$ est celui de $a(-1)^{l-1}$ et par suite $Q_n(r_l - a)Q_n(r_{l+1} - a) < 0$, donc il existe $\beta_l \in]r_l - a, r_{l+1} - a[$ tel que $Q_n(\beta_l) = 0$ et donc nécessairement $P_n(\beta_l) = 0$.
D'autre part, $\lim_{x\to+\infty} Q_n(x) =$le signe de $(-1)^k \times +\infty$ et le signe de $Q_n(r_k - a)$ est celui de $a(-1)^{k-1}$. Donc il existe une racine de Q_n et donc une valeur propre $\beta_k \in]r_k, +\infty[$.
En conclusion, le nombre de racines du polynôme caractéristique de $M_n(a,a)$ comptées avec leur ordre de multiplicité et $\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i - 1) + (k-1) + 1 = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i = n$. On obtient donc toutes les racines du polynôme caractéristique P_n.
$M_n(a,a)$ est une matrice symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.

3. (a) • Pour M, on a $\mathrm{Sp}(M) = \{r_1 - a, r_2 - a, r_3 - a, \alpha, \beta, \gamma\}$ avec $r_1 - a < \alpha < r_2 - a < \beta < r_3 - a < \gamma$. Si $x = (x_1, x_2, ..., x_6)$ est un vecteur propre associé à $\theta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$, alors

$$\begin{cases} (r_1 - \theta - a)x_1 + a\sum_{i=1}^{6}x_i = (r_1 - \theta - a)x_2 + a\sum_{i=1}^{6}x_i & = 0\\ (r_2 - \theta - a)x_3 + a\sum_{i=1}^{6}x_i = (r_2 - \theta - a)x_4 + a\sum_{i=1}^{6}x_i & = 0\\ (r_3 - \theta - a)x_5 + a\sum_{i=1}^{6}x_i = (r_3 - \theta - a)x_6 + a\sum_{i=1}^{6}x_i & = 0 \end{cases}$$

D'où $\left(\dfrac{1}{r_1-\theta-a}, \dfrac{1}{r_1-\theta-a}, \dfrac{1}{r_2-\theta-a}, \dfrac{1}{r_2-\theta-a}, \dfrac{1}{r_3-\theta-a}, \dfrac{1}{r_3-\theta-a}\right)$ est un vecteur propre associé à θ.
Calcul pour la matrice N :

$$\begin{array}{rcl} P_6(x) & = & f_6(a+x) - af_6'(a+x) \\ & = & (r_1-a-x)^3(r_2-a-x)^3 + 3a(r_1-a-x)^2(r_2-a-x)^3 + 3a(r_1-a-x)^3(r_2-a-x)^2 \\ & = & (r_1-a-x)^2(r_2-a-x)^2\left[x^2-(r_1+r_2+4a)x + r_1r_2 - ar_1 - ar_2 + 3ar_1 + 3ar_2 - 5a^2\right] \end{array}$$

Le discriminant associé à l'équation de second degré est $\Delta = (r_2+r_2+4a)^2 - 4(r_1r_2 - ar_2 - ar_2 + 3ar_1 + 3ar_2 - 5a^2) = (r_1-r_2)^2 + 36a^2$, d'où :

$$\alpha = \frac{r_1+r_2+4a+\sqrt{(r_1-r_2)^2+36a^2}}{2}, \;\; \beta = \frac{r_1+r_2+4a-\sqrt{(r_1-r_2)^2+36a^2}}{2}$$

$x = (x_1, x_2, ..., x_6)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $r_1 - a$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} a\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{6} x_i\right) & = 0 \\ a\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{6} x_i\right) & = (r_1-r_2)x_4 \\ a\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{6} x_i\right) & = (r_1-r_2)x_5 \\ a\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{6} x_i\right) & = (r_1-r_2)x_6 \end{cases}$$

Donc $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ et par suite $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

D'où $E_{r_1-a} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

De même, $E_{r_2-a} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Soit $\theta \in \{\alpha, \beta\}$ et $x = (x_1, x_2, ..., x_6)$ un vecteur propre associé, on obtient alors le système :

$$\begin{cases} (r_1 - \theta - a)x_1 + a\displaystyle\sum_{i=1}^{6} x_i &= 0 \\ (r_1 - \theta - a)x_2 + a\displaystyle\sum_{i=1}^{6} x_i &= 0 \\ (r_1 - \theta - a)x_3 + a\displaystyle\sum_{i=1}^{6} x_i &= 0 \\ (r_2 - \theta - a)x_4 + a\displaystyle\sum_{i=1}^{6} x_i &= 0 \\ (r_2 - \theta - a)x_5 + a\displaystyle\sum_{i=1}^{6} x_i &= 0 \\ (r_2 - \theta - a)x_6 + a\displaystyle\sum_{i=1}^{6} x_i &= 0 \end{cases}$$

D'où $\left(\dfrac{1}{r_1 - \theta - a}, \dfrac{1}{r_1 - \theta - a}, \dfrac{1}{r_1 - \theta - a}, \dfrac{1}{r_2 - \theta - a}, \dfrac{1}{r_2 - \theta - a}, \dfrac{1}{r_2 - \theta - a}\right)$ est un vecteur propre associé à θ.

(b) Application numérique :
$\mathrm{Sp}(N) = \{-5, -3, 3, 7\}$ avec -5 et 3 sont des valeurs propres doubles. Une base de vecteurs propres est donnée par $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ où :

$$E_{-5} = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; E_{-3} = \mathrm{Vect}(v_3) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}),$$

$$E_3 = \mathrm{Vect}(v_4, v_5) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}), \; E_7 = \mathrm{Vect}(v_6) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}).$$

• • • • • • • • • •